

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/122/115-122>

Aynur Əliyeva

Heydər Əliyev adına Hərbi İnstitut
<https://orcid.org/0000-0003-1173-8898>
aynur.197025@gmail.com

Nəzirə Bayramova

Heydər Əliyev adına Hərbi İnstitut
<https://orcid.org/0009-0006-7155-3536>
nazira.bayramova@gmail.com

Triqonometrik tənliklərin həllərinin birləşməsi və kəsişməsi

Xülasə

Məqalədə triqonometrik tənliklərin həll çoxluqlarının birləşməsi və kəsişməsi məsələləri araşdırılır. Belə tənliklərin bir neçə həll seriyasına malik ola bilməsi və bu seriyaların bir-birinin alt çoxluğu və ya ortaq elementlərə malik olması halları təhlil edilir. Müəlliflər bu həllərin analitik üsullarla vahid düstur şəklində ifadə olunmasının üsullarını təqdim edirlər. Əldə olunmuş həllərin birləşməsi, həllərin kəsişməsinin vahid çevrə üzərində təsviri vasitəsilə həll çoxluqları sistemləşdirilir. Həmçinin, eynigüclü tənlik anlayışı və tənliklər heyətinin ümumi həll formasına gətirilməsi üçün şərtlər müəyyən edilir. Nümunələr üzərində aparılan təhlillər nəticəsində göstərilir ki, kəsişən və ya üst-üstə düşən həll seriyalarının birləşdirilməsi ilə əldə olunan həll daha sadə və ümumi ifadələr formasında təqdim oluna bilər. Təqdim olunan yanaşma triqonometrik tənliklərin həllində vahidlik və səmərəliliyin artırılmasına xidmət edir.

Açar sözlər: triqonometrik tənlik, həll seriyaları, çoxluq, vahid çevrə, tənliklər heyəti, eynigüclü tənlik

Aynur Aliyeva

Heydar Aliyev Military Institute
<https://orcid.org/0000-0003-1173-8898>
aynur.197025@gmail.com

Nazira Bayramova

Heydar Aliyev Military Institute
<https://orcid.org/0009-0006-7155-3536>
nazira.bayramova@gmail.com

Union and Intersection of Solutions of Trigonometric Equations

Abstract

The article investigates the union and intersection of solution sets of trigonometric equations. It analyzes cases where such equations may have multiple solution series and where these series may be subsets of one another or share common elements. The authors present methods for expressing these solutions analytically in a unified formula. The solution sets are systematized through the union of solutions and the depiction of their intersections on a single unit circle. Additionally, the concept of equivalent equations is introduced, and conditions are determined for reducing a system of equations to a general solution form. Through the analysis of examples, it is demonstrated that

combining intersecting or overlapping solution series can yield simpler and more general expressions. The proposed approach aims to enhance consistency and efficiency in solving trigonometric equations.

Keywords: *trigonometric equation, solution set, arithmetic progression, intersection, equivalent equation, unit circle*

Giriş

Trigonometrik tənliklərin həlli zamanı iki və daha çox həll seriyasından ibarət həll çoxluğu alınır. Bu həll seriyalarından biri digərinin alt çoxluğu ola bilər, yaxud həll seriyaları kəsişə bilər (Gülməmmədov, 2013). Çoxluqların birləşməsi zamanı ortaq elementlər bir dəfə yazıldığından, trigonometrik tənliklərin həllini kəsişməyən həll ailələri şəklində göstərmək daha məqsədəuyğundur.

Trigonometrik tənliyin həllinin kəsişməyən həll ailələri şəklində yazılmasını araşdıraraq (Borodulya, 1989).

Tədqiqat

Fərz edək ki, bizə tam ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş

$$x_n = a + dn \quad (a, n \in Z) \quad (1)$$

düsturu ilə ədədlər ardıcılığı verilib (Çıpkin & Pinskiy, 1983). Bu düsturda n -ə ardıcıl qiymətlər verdikdə, $a + dn$ ifadəsinin aldığı qiymətlərə əsasən demək olar ki, birinci həddi a , silsilə fərqi d olan ədədi silsilə verilib. $n \in Z$ olduğu üçün $d > 0$ və $a \geq 0$ götürmək olar, çünki d və ya a mənfi qiymətlər aldığında x_n - in qiymətlər çoxluğu dəyişmir. Eyni zamanda qəbul edə bilərik ki, $0 \leq a < d$. $x_n = a + dn$ ($n \in Z$) düsturunda $d = 1$ və $a = 0$ götürsək, x_n - in qiymətlər çoxluğu Z olur.

Tam ədədlər çoxluğunu, fərqləri 2, 3, 4, ... və s , hər bir həddi isə tam ədəd olmaqla $x_n = a + dn$ ($n \in Z$) düsturu ilə təyin olunan ədədi silsilələrin birləşməsi kimi ifadə edək. Məsələn: $d = 2$ olduqda $0 \leq a < 2$ olar. Nəticə etibarlı ilə $a = 0$ və $a = 1$ alırıq. Bu səbəbdən tam ədədlər çoxluğunu $\{0 + 2k\}$ və $\{1 + 2k\}$ ($k \in Z$) çoxluqlarının birləşməsi kimi göstərmək olar.

Yəni, $Z = \{2k\} \cup \{2k + 1\}$ kimi yazmaq olar.

$d = 3$ olduqda $a = 0, 1, 2$ olur. Bu halda düstur $x_n = a + 3n$ şəklinə düşür və deməli, $Z = \{0 + 3k\} \cup \{1 + 3k\} \cup \{2 + 3k\}$ kimi yazmaq olar.

Analoji olaraq $d = m$ olduqda $a = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ qiymətlərini alır. Onda $x_n = a + mn$ düsturunda a - nın qiymətlərini ardıcıl olaraq nəzərə alsaq:

$$Z = \{0 + mk\} \cup \{1 + mk\} \cup \{2 + mk\} \cup \{(m - 1) + mk\}.$$

Beləliklə, tam ədədlər çoxluğunu, birinci həddi $0, 1, 2, \dots, m - 1$, fərqləri isə eyni m ($m \in Z$) ədədinə bərabər olan $x_n = a + dn$ ($n \in Z$) düsturu ilə təyin olunan ədədi silsilələrin birləşməsi şəklində təqdim etdik. Buradan hökm etmək olarki, tam ədədlər çoxluğu m ədədinə görə alt çoxluqlara ayrılıb.

Bunun tərsini də göstərmək olar. Fərz edək ki, m sayda, fərqləri eyni olan n -ci hədd düsturları

$$x_n = a_1 + dn, y_n = a_2 + dn, \dots, t_n = a_m + dn \quad (n \in Z) \quad (2)$$

şəklində olan ədədi silsilələr verilmişdir. Əgər bu ardıcılıqların birinci hədləri, fərqi ümumi fərqin yəni (d -nin) onların sayına (ədədi silsilələrin sayına) nisbətində bərabər olan artan ədədi silsilə əmələ gətirirsə, onda həmin silsilələri birləşdirib bir düsturla ifadə etmək olar (Mordkoviç, 1987). Yəni,

$$a_m - a_{m-1} = a_{m-1} - a_{m-2} = \dots = a_2 - a_1 = \frac{d}{m} \quad (3)$$

şərti ödənilirsə, və ya $a_1, a_2, \dots, a_m$ ədədləri, silsilə fərqi $\frac{d}{m}$ olan sonlu sayda ədədi silsilə əmələ gətirirsə,

$$a_1 + dn = a_1 + \frac{d}{m}(mn) \quad (4)$$

$$a_2 + dn = a_1 + \frac{d}{m} + dn = a_1 + \frac{d}{m}(mn+1) \quad (5)$$

$$a_m + dn = a_1 + \frac{d}{m}(mn+m-1) \quad (6)$$

Onda bu çoxluqları:

$$Z_n = a_1 + \frac{d}{m}(mn+m-1) \quad (7)$$

şəklində göstərmək olar.

(7) bərabərlikləri birləşdirmə şərti adlanır.

Məsələnin qoyuluşu və həlli.

Nümunə 1. $\sin 4x \square \sin 8x = 0$ tənliyini həll edin (DİM. Test toplusu, 2023).

Həlli:

$$\sin 4x \square \sin 8x = 0$$

$$\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi k, \quad x = \frac{\pi k}{4}, \quad k \in Z$$

$$\sin 8x = 0 \Rightarrow 8x = \pi n, \quad x = \frac{\pi n}{8}, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, \quad k \in Z \quad \vee \quad x = \frac{\pi n}{8}, \quad n \in Z$$

həllər seriyasını bir düsturla vermək olar. Cədvəl tərtib edək.

I həllər seriyasını cədvəldə göstərək.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8

II həllər seriyasını cədvəldə göstərək.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	...			2π
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...			16

Cədvəllərdən aydın olur ki, birinci seriya ədədlər ikinci seriya ədədlərin xüsusi halıdır.

Çünki, $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$ həllər seriyasında $n = 2k$ yazsaq, ikinci seriya ədədlərdən birinci seriya ədədlər alınır. Yəni:

$$\left\{ \frac{\pi k}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi n}{8} \right\} = \left\{ \frac{\pi n}{8} \right\}, \quad n \in Z \text{ alırıq (Məmmədli, 2012).}$$

Nümunə 2. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$ tənliyini həll edin (Qovorov, Dıbov, Miroşin, Smirnova, 1986).

$$(\cos 9x - \cos 7x) + (\cos 3x - \cos x) = 0$$

$$-2 \sin 8x \cdot \sin x - 2 \sin 2x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin x (\sin 8x + \sin 2x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin 5x \cdot \cos 3x = 0$$

$$\text{Həlli: } \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in Z \end{cases}$$

$$\{ \pi k \} \cup \left\{ \frac{\pi n}{5} \right\} = \left\{ \frac{\pi n}{5} \right\}, \quad n \in Z$$

$\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$ həllər seriyasında $n = 5k$ yazsaq, ikinci seriya ədədlərdən birinci seriya ədədlər alınır.

Yəni, $x = \pi k, k \in Z$ şəklində köklər $x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z$ kökləri içərisində olduğu üçün bu iki həllin yerinə

$x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z$ həlli götürülür. Deməli, cavab $x = \frac{\pi n}{5}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, n, m \in Z$ şəklində olar.

Ümumiyyətlə, həllərin birləşdirilməsi zamanı aşağıdakı qaydaya istinad etmək daha məqsəda uyğun olardı.

$$1. \begin{cases} \sin mx = 0 \\ \sin nx = 0 \end{cases}$$

heyətini təşkil edən tənliklərdə $m, n \in N$ ədədləri üçün m ədədi n -ə tam bölünərsə, tənliklər heyəti $\sin mx = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür.

$$\begin{cases} \sin mx = 0 \\ \sin nx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin mx = 0, m, n \in N$$

$$a) \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$2. \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow |\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$3. \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

Nümunə 2. $\sin 3x \cdot \sin 9x \cdot \sin 18x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: 18 ədədi 3-ə və 9-a bölündüyü üçün verilən tənlik $\sin 18x = 0$ tənliyi ilə eynigüclüdür (Emel Seymen, Gencer Qazioğlu, Sultan Yıldırım, Yılmaz Meral, 2020). Yəni,

$$\sin 18x = 0 \Rightarrow 18x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

Nümunə 3. $\sin(\pi \cdot \sin x) = 0$ tənliyini həll edin (DİM. Test toplusu, 2023).

Həlli: $\sin(\pi \cdot \sin x) = 0 \Rightarrow \pi \cdot \sin x = \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin x = k$ alırıq. k ədədi tam ədəd olduğundan 0, -1 və 1 qiymətlərini ala bilər.

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{və} \quad \sin x = 0 \quad \text{həllərinin birləşdirilməsindən}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ alınar. } \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Nümunə 4. $2\sin 3x + 3\cos 2x = -5$ tənliyini həll edin (Yaqubov, İsmayılov, & Ağakışiyev, 2008).

Həlli: $\sin 3x$ və $\cos 2x$ - in ən kiçik qiymətləri (-1) olduğundan bu tənliyin sol tərəfindəki ifadənin qiyməti (-5) - dən kiçik ola bilməz. Lakin bu ifadə (-5) - ə bərabər qiyməti yalnız və yalnız o zaman ala bilər ki, həm $\sin 3x$, həm də $\cos 2x$ özünün ən kiçik qiymətini alsın.

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

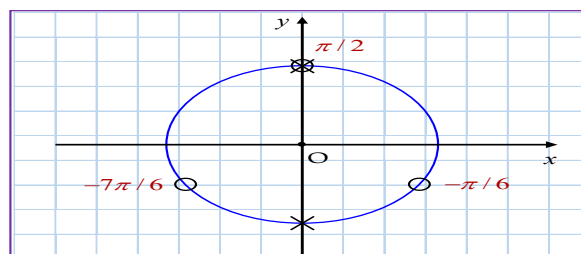
Bu həllər çoxluqlarının kəsişməsini analitik üsulla tapaq. Bunun üçün bu düsturların sağ tərəflərini bir - birinə bərabər edərək alınan tənliyi k və n tam parametrlərinə nəzərən həll etmək lazımdır.

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \frac{-1}{6} + \frac{2k}{3} = \frac{1}{2} + n \Rightarrow -1 + 4k = 3 + 6n$$

$$4k = 4 + 6n \Rightarrow 2k = 2 + 3n$$

Aydındır ki, bu tənliyin tam həlləri $n = 2m, k = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z}$ şəklində olacaq. Deməli, verilən tənliyin həllər çoxluğu $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ olacaq.

Sistemin həllər çoxluğunu vahid çevrə üzərində yuxarıdakı düsturla ifadə olunan həllər çoxluqlarına uyğun olan nöqtələri (uyğun olaraq “□”, “x” işarələri) qeyd etməklə də tapmaq olardı (Məmmədli, 2012).



Şəkildən göründüyü kimi bu həllər çoxluqlarının kəsişməsi $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ düsturu ilə ifadə olunacaq.

$$\text{Cavab: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Nümunə 5. $\frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin x} = 0$ tənliyini həll edin (Borodulya, 1989).

Həlli: Məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu

$$\begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$ olduğundan bi sistem $\sin 4x \neq 0$ bərabərsizliyi ilə eynigüclü olacaq. Deməli,

$$4x \neq \pi k, \quad k \in Z \text{ yəni } x \neq \frac{\pi k}{4}, \quad k \in Z \text{ olmalıdır.}$$

Verilən tənliyin hər iki tərəfini $\sin x \sin 4x \neq 0$ - a vursaq həmin tənliyin təyin oblastında onunla eynigüclü olan tənlik alarıq.

$$\sin x - 2 \sin x \cos 2x = \sin 4x$$

$$\sin x + 2 \sin x \cos 2x = \sin 4x$$

$$\sin 4x - \sin 3x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{7x}{2} = 0$$

Verilən tənliyin təyin oblastında

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \neq 0 \text{ olduğundan } 2 \sin \frac{x}{2} \neq 0 \text{ olacaq. Ona görə də } \cos \frac{7x}{2} = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Buradan

$$\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in Z$$

Bu düsturla ifadə olunan həllər çoxluğunun tənliyin təyin oblastına daxil olmayan həllərini atmaq lazımdır. Başqa sözlə n - in $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7} = \frac{\pi k}{4}$ şərtini ödəyən tam qiymətlərini atmaq lazımdır. Bu

bərabərliyin hər iki tərəfini $\frac{28}{\pi}$ - yə vursaq $4 + 8n = 7k$ alarıq.

Bu tənliyin sol tərəfi n - in istənilən tam qiymətində 4 - ə bölündüyündən $k = 4m$ olmalıdır. Onda:

$$4 + 8n = 28m \Rightarrow 1 + 2n = 7m$$

n - in istənilən tam qiymətində sol tərəf tək ədəd olduğundan m tək ədəd olmalıdır, yəni $m = 2p + 1$. Onda

$$2n + 1 = 7(2p + 1) \Rightarrow n = 7p + 3 \text{ olacaq.}$$

Deməli, verilən tənliyin həllər çoxluğu

$$\frac{\pi}{7} + 2\pi n, \quad n \neq 7p + 3, \quad n, p \in Z$$

düsturu ilə ifadə olunacaq.

$$\text{Cavab: } \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}, \quad n \neq 7p + 3, \quad n, p \in Z$$

Nümunə 6. $\frac{1 + \cos 6x}{\sin 2x} = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$\frac{1 + \cos 6x}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos 6x = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 6x = -1 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi + 2\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Buradan aydındır ki, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ şəklində olan ədədlərdən $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ şəklində olmayanlar, yəni, $M = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \right\}$ və $K = \left\{ \frac{\pi n}{2} \right\}$ çoxluqlarının fərqi ibarət olan ədədlər ödəyir (Şaxno, 1969). Həmin fərqi tapmaq üçün $M - K = M - (M \cap K)$ bərabərliyini tətbiq edək. M və K çoxluqlarının kəsişməsini tapmaq üçün $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi n}{2}$ tənliyini həll etməliyəm. Buradan π -yə ixtisar etsək, $\frac{1}{6} + \frac{k}{3} = \frac{n}{2} \Rightarrow 3n = 2k + 1$ alırıq. Sonuncu bərabərlik $k = 3m + 1, m \in \mathbb{Z}$ yaxud $n = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$ olduqda doğrudur. Onda

$M - K = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \neq 3m + 1 \right\}$ olar. Yəni k üçün $k = 3m - 1$ yaxud $k = 3m$ seçə bilərik. Bunları $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ həllində nəzərə alsaq, aşağıdakı nəticəyə gələrik:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi \cdot 3m}{3}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(3m-1)}{3}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi m}{3} - \frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

Bu iki cavabı birləşdirsək, tənliyin həlli $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ şəklində olar.

Cavab: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$

Nəticə

Məqalədə triqonometrik tənliklərin həll çoxluqlarının birləşməsi və kəsişməsi məsələlərinə baxılmışdır. Belə tənliklərin bir neçə həll seriyasına malik olduğu hallar araşdırılmışdır. Bu həllərin analitik üsullarla vahid düstur şəklində ifadə olunmasının yolları təqdim edilmişdir. Əldə olunmuş həllərin birləşməsi və həllərin kəsişməsinin vahid çevrə üzərində təsviri vasitəsilə həll çoxluqları müəyyən edilmişdir. Nümunələr üzərində aparılan təhlillərdən belə qənaətə gəlinmişdir ki, kəsişən və ya üst-üstə düşən həll seriyalarının birləşdirilməsi ilə əldə olunan həll daha sadə və ümumi ifadələr formasında təqdim oluna bilər. Bu cür yanaşma triqonometrik tənliklərin həlli zamanı səmərəliliyin artırılmasına xidmət edir.

Ədəbiyyat

1. “Сbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh vo vtuzy” (6-cı nəşr). (2013). M.İ.Skanavi (red.). Vıssaya şkola.
2. Borodulya, İ. T. (1989). *Trigonometriçeskie uravneniya i neravenstvo*. Moskva: Prosveşşenie.
3. Çıpkin, A. Q., & Pinskiy, A. İ. (1983). *Spravoçnoe posobie po metodam reşeniya zadaç po matematike*. Nauka.
4. DİM. (2023). *Test toplusu: Riyaziyyat (Yeni təhsil proqramı (kurikulum) üzrə), II hissə*.
5. Dr. Ahmet Emin, Gerboğa, A., Güneş, G., & Kayacier, M. (2020). *Matematik 12*.
6. Emel Seymen, Qazioğlu, G., Yıldırım, S., & Meral, Y. (2020). *Matematik 11*.
7. Gülməmmədov, V. (2013). *Abituriyentlər üçün riyaziyyat, II hissə*.
8. Qovorov, V. M., Dıbov, P. T., Miroşin, H. B., & Smirnova, S. F. (1986). *Sbornik konkursnix zadaç po matematike*. Nauka.
9. Məmmədli, Ə. (2012). *Riyaziyyat, I hissə*.
10. Mordkoviç, A. Q. (1987). *Alqebra i naçala analiza*. Vıssaya şkola.
11. Şaxno, K. U. (1969). *Sbornik zadaç po elementarnoy matematike povişennoy trudnosti*. Vıseyşaya şkola.
12. Yaqubov, M. H., İsmayılov, T. X., & Ağakışiyev, İ. Ə. (2008). *Riyaziyyat: Məsələ və misallar*.
13. Yaqubov, M., & İsmayılov, T. X. (2022). *Riyaziyyat: Yeni təhsil proqramı (kurikulum) üzrə qiymətləndirmə test tapşırıqları, II hissə*.

Daxil oldu: 01.04.2025

Qəbul edildi: 07.08.2025